УДК 512.644

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫВОДА ФОРМУЛ КРАМЕРА

Гербеков Х.А., к.п.н., доцент,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии,
Карачаево-Черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск

Аннотация. В данной статье рассматривается метод вывода формулы Крамера для системы двух и трех линейных уравнений и относительно 2 и 3 переменных, получаемых непосредственно методом подстановки и вычислением определителей второго и третьего порядка.

Ключевые слова: система линейных уравнений, определитель второго порядка, определитель третьего порядка, формулы Крамера.

A METHOD OF DERIVATION OF THE FORMULA OF KRAMER

Gerbekov H.A., Ph.D., Associate Professor,
Head of the Department of Algebra and Geometry,
Karachayevo-Cherkessia State University named after W. D. Aliyev, Karachaevsk

Abstract. This article discusses the method of derivation of Cramer's formula for the system of two and three linear equations and with respect to 2 and 3 variables obtained directly by the method of substitution and calculation of determinants of the second and third order.

Keywords: system of linear equations, the determinant of the second order, the determinant of the third order of Cramer's formula.

Пусть даётся система n линейных уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

Квадратная таблица чисел, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы. Матрица является квадратной – в ней число строк (горизонтальные строки) совпадает с числом столбцов (вертикальные строки). Существуют и неквадратные матрицы, в которых число строк не совпадает с числом столбцов. Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D… Числа a_{11}, a_{12}, …, a_{nn1}, составляющие матрицу, - ее элементы.

Столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ — это столбец свободных членов.

Рассмотрим систему 2 и 3 линейных уравнений относительно 2 и 3 неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{2,}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{3}$$

Запишем соответствующие матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Любая квадратная матрица A имеет свой определитель. Прямоугольная, неквадратная матрица определителя не имеет.

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется число, обозначаемое

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по правилу

$$\Delta = |A| = \det A = a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}. \tag{6}$$

Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число, обозначаемое

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по правилу

$$\Delta = |A| = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{7}$$

Решение системы линейных уравнений начнем с решения системы двух линейных уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \end{cases} \tag{8}$$

Используем «школьный» метод подстановки. Из первого уравнения выразим x_2 через x_1 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{12}\left(\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1\right) = b_2,$$

$$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}b_1 - a_{22}a_{11}x_1 = b_2a_{12},$$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Аналогично, найдем x_2:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2,$$

$$a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right) + a_{22}x_2 = b_2,$$

$$a_{22}a_{11}x_2 + a_{21}b_1 - a_{12}a_{21}x_2 = b_2a_{11},$$

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2a_{11} - a_{21}b_1,$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Коэффициенты уравнения (8) есть определители второго порядка и обозначим:

$$det\ A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда линейное уравнение (8) относительно одной переменной примет в новых обозначениях вид:

$$x_1\Delta = \Delta_1$$
$$x_2\Delta = \Delta_2.$$

Откуда при $\Delta \neq 0$ получим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Это формулы Крамера решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель Δ будем называть главным определителем, а Δ_1 и Δ_2 - побочными (вспомогательными) определителями системы.

Решим систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (9)$$

Получим систему

$$x_1(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})$$
$$= b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + b_2a_{12}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22}. \qquad (10)$$

$$x_2(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})$$
$$= b_1a_{22}a_{23} - b_1a_{21}a_{33} + b_2a_{11}a_{33} - b_3a_{11}a_{23} + b_3a_{13}a_{21} - b_2a_{13}a_{31}. \qquad (11)$$

$$x_3(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) =$$
$$= b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{31}a_{22} + +b_2a_{12}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} + b_3a_{11}a_{22} - b_3a_{12}a_{21}. \qquad (12)$$

Или

$$x_1\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{vmatrix}$$

$$x_2\left(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}\right)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}b_2a_{23}\\b_3a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}b_2\\a_{31}b_3\end{vmatrix}$$

$$x_3\left(a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}\right)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}b_2\\a_{32}b_3\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}b_2\\a_{31}b_3\end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$$

Назовем коэффициенты определителями третьего порядка и обозначим их следующим образом

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}a_{23}\\a_{31}a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\a_{31}a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=b_1\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}b_2a_{23}\\b_3a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}b_2a_{22}\\b_3a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}b_2a_{23}\\b_3a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}b_2\\a_{31}b_3\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}b_2\\a_{32}b_3\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}b_2\\a_{31}b_3\end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix}a_{22}a_{23}\\a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$$

Тогда мы получим формулы Крамера для системы трех линейных уравнений при условии $\Delta\neq 0$:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Или учитывая формулы (10), (11), (12) и вычисляя определители (5) при $\Delta\neq 0$ получим формулу Крамера для системы (9)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Литература:

1. Всероссийские математические олимпиады школьников: Кн. Для учащихся/Г.Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. – М.: Просвещение, 1992.
2. Гербеков Х.А., Боташева З.Х. Метод Крамера как средство продуктивного изучения теории определителей. Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию, 18-22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов на тему «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России», VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU - 2017)» / отв. ред. Л.Р. Шакирова. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. - Т. 2. - 278 с. - С. 55-60.
3. Кострикин А. И.Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры: Учеб. для вузов.- 2-е изд., исправл. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.